СЕМИВАРИОГРАММА И СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Т. В. Цеховая

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: Tsekhavaya@bsu.by

Семивариограмма играет важную роль при анализе временных рядов в экономике, финансах, геологии, экологии и многих других областях человеческой деятельности. Возникает задача исследования ее свойств. Осуществлен стохастический анализ случайных процессов при дополнительных ограничениях на семивариограммы этих процессов.

Ключевые слова: семивариограмма, случайный процесс, стационарность, стохастический анализ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА СЕМИВАРИОГРАММЫ

В середине XX века появилось новое направление статистического анализа временных рядов (случайных процессов) – вариограммный анализ. Стало возможным более глубокое и полное изучение явлений, встречающихся в различных областях человеческой деятельности, поскольку современные методы вариограммного анализа используют информацию о внутренней структуре экспериментальных данных и, следовательно, охватывают всю сложность изучаемых процессов. При этом, как правило, основной моделью исследуемых событий являются стационарные в широком смысле и внутренне стационарные случайные процессы.

Вариограммой действительного случайного процесса $Y(t)$, $t \in \mathrm{Z} =\{0, \pm 1, \pm 2,\ldots\}$ ($\mathrm{R} = (-\infty, +\infty)$), называется функция вида

$$2\gamma(t, s) = D\{Y(t) - Y(s)\}, \quad t, s \in \mathrm{T},$$

а функция $\gamma(t, s)$ – семивариограммой. Ж. Матерон в своей монографии [1] функцию $\gamma(t, s)$ называет собственной функцией.

Из определения вариограммы случайного процесса $Y(t)$, $t \in \mathrm{Z}(\mathrm{R})$, нетрудно заметить, что

$$\gamma(t, s) \geq 0, \quad \gamma(t, t) = 0,$$
$$2\gamma(t, s) = D(t) - 2R(t, s) + D(s), \tag{1}$$

где $t, s \in \mathrm{Z}(\mathrm{R})$, $D(t)$, $t \in \mathrm{Z}(\mathrm{R})$, – дисперсия, $R(t, s)$, $t, s \in \mathrm{Z}(\mathrm{R})$, – ковариационная функция случайного процесса $Y(t)$, $t \in \mathrm{Z}(\mathrm{R})$.

Действительный случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathrm{Z}(\mathrm{R})$, называется внутренне стационарным, если справедливы следующие равенства:

$$M\{Y(t) - Y(s)\} = 0,$$
$$D\{Y(t) - Y(s)\} = 2\gamma(t - s),$$

где $2\gamma(t-s)$, $t, s \in Z(R)$, – вариограмма (функция $\gamma(t)$, $t \in Z(R)$, – семивариограмма) рассматриваемого процесса.

Если случайный процесс является стационарным в широком смысле, то он будет и внутренне стационарным. Из (1) легко получить, что ковариационная функция $R(t)$, $t \in Z(R)$, и семивариограмма $\gamma(t)$, $t \in Z(R)$, стационарного в широком смысле случайного процесса $Y(t)$, $t \in Z(R)$, связаны соотношением:

$$R(t) = R(0) - \gamma(t). \tag{2}$$

Основоположником вариограммного анализа временных рядов является Ж. Матерон [1]. Дальнейшее развитие теоретических исследований по этой тематике продолжили, например, Дж. С. Дэвис [2], N. Cressie [3] и другие ученые.

На практике часто оказывается, что процессы не обладают конечной дисперсией. В таких ситуациях часто делается предположение об их внутренней стационарности, и применяются методы вариограммного анализа, что позволяет существенно расширить круг решаемых проблем.

Исследуем поведение семивариограммы $\gamma(t)$, $t \in Z(R)$, внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$, $t \in Z(R)$, при $t \to \infty$.

Теорема 1. Семивариограмма $\gamma(t)$, $t \in Z(R)$, внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$, $t \in Z(R)$, не может возрастать на бесконечности быстрее, чем функция At^2, где A – некоторая положительная постоянная, $t \in Z(R)$.

Доказательство. Используя определение вариограммы, для любого $n \in N$ запишем

$$2\gamma(t) = M\{(Y(t)-Y(0))^2\} = M\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left[Y\left(\frac{it}{n}\right)-Y\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)\right]\right)^2\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M\left\{\left[Y\left(\frac{it}{n}\right)-Y\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)\right]\left[Y\left(\frac{jt}{n}\right)-Y\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right]\right\}.$$

В силу неравенства Коши – Буняковского

$$2\gamma(t) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{M\left\{\left[Y\left(\frac{it}{n}\right)-Y\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)\right]^2\right\}}\sqrt{M\left\{\left[Y\left(\frac{jt}{n}\right)-Y\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right]^2\right\}} = n^2 \cdot 2\gamma\left(\frac{t}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\gamma(t)}{t^2} \le \frac{\gamma(t/n)}{(t/n)^2}.$$

Обозначим через A максимум функции $\dfrac{\gamma(t)}{t^2}$ при $t \ge 1$, тогда $\gamma(t) \le At^2$, $t \ge 1$. Отсюда вытекает требуемое.

Отметим, если семивариограмма $\gamma(t)$, $t \in Z(R)$, внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$, $t \in Z(R)$, возрастает на бесконечности быстрее, чем функция At^2, $A > 0$, $t \in Z(R)$, это свидетельствует о существовании линейного тренда.

Теорема 2. Для того чтобы функция $\gamma(t)$, $t \in R$, была семивариограммой некоторого внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$, $t \in R$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$, $t \in R$, являлась неотрицательно определенной.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\gamma(t)$, $t \in R$, – семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$, $t \in R$. Покажем, что для любого $a > 0$ функция

$e^{-a\gamma(t)}$, $t \in$ R, является неотрицательно определенной. Учитывая свойства семивариограммы внутренне стационарного случайного процесса, функция $e^{-a\gamma(t)}$ является непрерывной, четной и выпуклой книзу, причем $e^{-a\gamma(t)} \geq 0$, $e^{-a\gamma(0)} = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-a\gamma(t)} = 0$. Тогда в силу теоремы Пойа [4] для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$, $t \in$ R, является характеристической функцией, и, следовательно, согласно теореме Бохнера – Хинчина из [4], $e^{-a\gamma(t)}$ – неотрицательно определенная функция.

Достаточность. Пусть $e^{-a\gamma(t)}$, $a > 0$, $t \in$ R, – неотрицательно определенная функция. Тогда по теореме Бохнера – Хинчина [4] эта функция является характеристической функцией. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство достаточного условия теоремы 1 [5]. Теорема доказана.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим действительный внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in$ R, с конечным моментом второго порядка $M\{Y^2(t)\} < \infty$, $t \in$ R, и семивариограммой $\gamma(t)$, $t \in$ R.

Теорема 3. Внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in$ R, непрерывен в среднем квадратическом на R тогда и только тогда, когда его семивариограмма $\gamma(t)$, $t \in$ R, удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to 0} \gamma(t) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть случайный процесс $Y(t)$, $t \in$ R, непрерывен в среднем квадратическом на R. Тогда из определения непрерывности в среднем квадратическом в произвольной точке $t \in$ R имеем

$$\lim_{h\to 0} M\{|Y(t+h) - Y(t)|^2\} = 0, \quad t+h \in \mathrm{R}.$$

Учитывая определение вариограммы действительного внутренне стационарного случайного процесса, запишем

$$\lim_{h\to 0} M\{(Y(t+h) - Y(t))^2\} = \lim_{h\to 0} 2\gamma(h) = 0,$$

$t, t+h \in \mathrm{R}$, откуда вытекает (3).

Достаточность. Пусть семивариограмма $\gamma(t)$, $t \in$ R, действительного внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$, $t \in$ R, удовлетворяет условию (3). Тогда из определения семивариограммы получим

$$\lim_{t\to 0} \gamma(t) = \lim_{t\to 0} M\{(Y(s+t) - Y(s))^2\} = 0, \quad s, s+t \in \mathrm{R}.$$

В силу определения непрерывности в среднем квадратическом заключаем, что случайный процесс $Y(t)$, $t \in$ R, непрерывен в среднем квадратическом в точке $s \in$ R. Следовательно, это утверждение справедливо и для любой точки множества R. Теорема доказана.

Теорема 4. Стационарный в широком смысле случайный процесс $Y(t)$, $t \in$ R, непрерывен в среднем квадратическом на R тогда и только тогда, когда его семивариограмма $\gamma(t)$, $t \in$ R, непрерывна в нуле.

Доказательство. Для доказательства теоремы следует воспользоваться соотношением (2), связывающим ковариационную функцию и семивариограмму стационарного в широком смысле случайного процесса, и теоремой 7 из главы VII [6].

Приведем без доказательства следующие известные результаты [7].

Лемма 1. Для того чтобы стационарный в широком смысле случайный процесс $Y(t)$, $t \in$ R, был дифференцируем в среднем квадратическом на R, необходимо и достаточно, чтобы его ковариационная функция $R(t)$, $t \in$ R, удовлетворяла условию

$$-R''(0) < +\infty,$$

где $R''(0)$ – вторая производная ковариационной функции в точке $t = 0$.

Следствие 1. Пусть $Y(t)$, $t \in$ R, – дифференцируемый на множестве R стационарный в широком смысле случайный процесс с ковариационной функцией $R(t)$, $t \in$ R. Тогда его производная в среднем квадратическом смысле $Y'(t)$, $t \in$ R, имеет ковариационную функцию $R_{Y'}(t) = -R''(t)$.

Рассмотрим далее действительный внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in$ R, с конечным моментом второго порядка и семивариограммой $\gamma(t)$, $t \in$ R.

Теорема 5. Для того чтобы внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in$ R, был дифференцируем в среднем квадратическом на R, необходимо и достаточно, чтобы его семивариограмма $\gamma(t)$, $t \in$ R, удовлетворяла условию

$$\gamma''(0) < +\infty, \qquad (4)$$

где $\gamma''(0)$ – вторая производная семивариограммы в точке $t = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in$ R, с конечным моментом второго порядка является дифференцируемым в среднем квадратическом на R. Тогда из критерия дифференцируемости в среднем квадратическом и следствия 1 к нему [7] заключаем, что ковариационная функция $R(t, s)$, $t, s \in$ R, процесса $Y(t)$ имеет конечную смешанную частную производную второго порядка $\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t \partial s}$ в точках $t = s$. Таким образом, учитывая соотношение (1), запишем

$$2\gamma(t, s) = D(t) - 2R(t, s) + D(s).$$

$$\frac{\partial^2 \gamma(t,s)}{\partial t \partial s} = -\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t \partial s},$$

т. е. функция $-\gamma(t, s)$, $t, s \in$ R, также имеет конечную смешанную частную производную второго порядка в точках $t = s$.

Далее, в силу определения семивариограммы внутренне стационарного случайного процесса получаем

$$-\left.\frac{\partial^2 \gamma(t,s)}{\partial t \partial s}\right|_{t=s} = \left.\frac{\partial^2 \gamma(t-s)}{\partial t \partial s}\right|_{t=s} = \gamma''(0) < +\infty,$$

что и требовалось показать.

Достаточность. Пусть семивариограмма действительного внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$, $t \in$ R, с конечным моментом второго порядка удовлетворяет условию (4). Запишем (4) в общем виде

$$\gamma''(0) = -\left.\frac{\partial^2 \gamma(t,s)}{\partial t \partial s}\right|_{t=s} < +\infty, \quad t, s \in \mathrm{R}.$$

Принимая во внимание равенство (1), связывающее ковариационную функцию и семивариограмму случайного процесса, имеем

$$\gamma''(0) = -\left.\frac{\partial^2\gamma(t,s)}{\partial t\partial s}\right|_{t=s} = \left.\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}\right|_{t=s} < +\infty,\ t, s \in \mathrm{R}.$$

Правая часть последнего равенства есть достаточное условие дифференцируемости в среднем квадратическом случайного процесса $Y(t)$, $t \in \mathrm{R}$ [7]. Теорема доказана.

Теорема 6. Для того чтобы стационарный в широком смысле случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathrm{R}$, был дифференцируем в среднем квадратическом на R, необходимо и достаточно, чтобы его семивариограмма $\gamma(t)$, $t \in \mathrm{R}$, удовлетворяла условию (4).

Доказательство. Для доказательства теоремы следует воспользоваться соотношением (2) и леммой 1.

Следствие 2. Пусть $Y(t)$, $t \in \mathrm{R}$, – дифференцируемый на множестве R стационарный в широком смысле случайный процесс с ковариационной функцией $R(t)$, $t \in \mathrm{R}$. Тогда его производная в среднем квадратическом смысле $Y'(t)$, $t \in \mathrm{R}$, имеет семивариограмму

$$\gamma_{Y'}(t) = -R''(0) + R''(t). \tag{5}$$

Доказательство. Случайный процесс $Y'(t)$, $t \in \mathrm{R}$, является стационарным в широком смысле. Запишем равенство (2), связывающее ковариационную функцию $R_{Y'}(t)$, $t \in \mathrm{R}$, и семивариограмму $\gamma_{Y'}(t)$, $t \in \mathrm{R}$, этого процесса. Имеем

$$\gamma_{Y'}(t) = R_{Y'}(0) - R_{Y'}(t),\ \ t \in \mathrm{R}.$$

Применим следствие 1 и получим требуемое.

Следствие 3. Пусть $Y(t)$, $t \in \mathrm{R}$, – дифференцируемый на множестве R стационарный в широком смысле случайный процесс с семивариограммой $\gamma(t)$, $t \in \mathrm{R}$. Тогда его производная в среднем квадратическом смысле $Y'(t)$, $t \in \mathrm{R}$, имеет семивариограмму

$$\gamma_{Y'}(t) = \gamma''(0) - \gamma''(t),\ \ t \in \mathrm{R}.$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (2), связывающее ковариационную функцию $R(t)$, $t \in \mathrm{R}$, и семивариограмму $\gamma(t)$, $t \in \mathrm{R}$, случайного процесса $Y(t)$, $t \in \mathrm{R}$. Вычислим производную второго порядка левой и правой части этого равенства. Тогда

$$\gamma''(t) = -R''(t),\ \ t \in \mathrm{R}.$$

Подставляя это соотношение в (5), получим требуемый результат.

Рассмотрим далее действительный внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathrm{R}$, с конечным моментом второго порядка, ковариационной функцией $R(t, s)$, $t, s \in \mathrm{R}$, дисперсией $D(t)$, $t \in \mathrm{R}$, и семивариограммой $\gamma(t)$, $t \in \mathrm{R}$.

Теорема 7. Интеграл в среднем квадратическом $I = \int_a^b Y(t)dt$ существует тогда и только тогда, когда существует

$$(b-a)\int_a^b D(s)ds - 2\int_0^{b-a}(b-a-u)\gamma(u)du,$$

где $-\infty \le a < b \le \infty$, $D(t)$, $t \in \mathrm{R}$, – дисперсия, а $\gamma(t)$, $t \in \mathrm{R}$, – семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$, $t \in \mathrm{R}$.

Доказательство. Из [6] следует, что существование интеграла Римана $\int_a^b\int_a^b R(t,s)dtds$ является необходимым и достаточным условием существования интеграла в среднем квадратическом $I = \int_a^b Y(t)dt$. Из соотношения (1), определения семивариограммы внутренне стационарного процесса запишем

$$\int_a^b\int_a^b R(t,s)dtds = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b D(t)dtds + \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b D(s)dtds - \int_a^b\int_a^b \gamma(t,s)dtds =$$

$$= (b-a)\int_a^b D(s)ds - \int_a^b\int_a^b \gamma(t-s)dtds.$$

Во втором интеграле сделаем замену переменных интегрирования: $t = t$, $t - s = u$. Тогда, учитывая свойства семивариограммы, имеем

$$\int_a^b\int_a^b R(t,s)dtds = (b-a)\int_a^b D(s)ds - \int_{-(b-a)}^{0} \gamma(u)du \int_a^{u+b} dt - \int_0^{b-a} \gamma(u)du \int_{u+a}^{b} dt =$$

$$= (b-a)\int_a^b D(s)ds - \int_{-(b-a)}^{b-a} (b-a-|u|)\gamma(u)du =$$

$$= (b-a)\int_a^b D(s)ds - 2\int_0^{b-a} (b-a-u)\gamma(u)du,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $Y(t)$, $t \in \mathrm{R}$, – стационарный в широком смысле случайный процесс с ковариационной функцией $R(t)$, $t \in \mathrm{R}$, и семивариограммой $\gamma(t)$, $t \in \mathrm{R}$.

Теорема 8. Интеграл в среднем квадратическом $I = \int_a^b Y(t)dt$ существует тогда и только тогда, когда существует

$$(b-a)^2 R(0) - 2\int_0^{b-a} (b-a-u)\gamma(u)du,$$

где $-\infty \le a < b \le \infty$, $R(t)$, $t \in \mathrm{R}$, – ковариационная функция, а $\gamma(t)$, $t \in \mathrm{R}$, – семивариограмма стационарного в широком смысле случайного процесса $Y(t)$, $t \in \mathrm{R}$.

Доказательство. Воспользуемся утверждением теоремы 7. Тогда из определения стационарного в широком смысле случайного процесса вытекает требуемый результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матерон, Ж.* Основы прикладной геостатистики / Ж. Матерон. М. : Мир, 1968. 408 с.
2. *Дэвис, Дж. С.* Статистический анализ данных в геологии / Дж. С. Дэвис. М. : Недра, 1990. Т. 1. 318 с.
3. *Cressie, N.* Statistics for spatial data / N. Cressie. New York : Wiley, 1991. 900 p.
4. *Ширяев, А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. М. : Наука, 1989. 640 с.
5. *Цеховая, Т. В.* Свойства вариограммы внутренне стационарных случайных процессов / Т. В. Цеховая // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения: Материалы науч. конф. Мн., 2004. С. 181–186.
6. *Булинский, А. В.* Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 408 с.
7. *Лоэв, М.* Теория вероятностей / М. Лоэв. М. : Иностр. литературы, 1962. 719 с.